

PI-Expoente de Álgebras Associativas

Roger R. Primolan¹

¹Bolsista do Processo nº 2019/22813-0
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).
Orientado por Lucia S. I. Murakami

2020

Seja F um corpo de **característica zero**. Uma F -**álgebra** é um espaço vetorial V sobre F munido de uma multiplicação $\cdot : V \times V \rightarrow V$ que satisfaz:

- ① $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
- ② $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$
- ③ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;$
- ④ $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b).$

Seja F um corpo de **característica zero**. Uma F -**álgebra** é um espaço vetorial V sobre F munido de uma multiplicação $\cdot : V \times V \rightarrow V$ que satisfaz:

- ① $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- ② $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- ③ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;
- ④ $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

Moralmente uma F -álgebra é um "**anel + espaço vetorial**" de tal modo que a operação de multiplicação do anel é associativa (1), compatível com a soma de vetores (2, 3) e com a multiplicação por escalares (4).

Álgebras

Seja F um corpo de **característica zero**. Uma F -**álgebra** é um espaço vetorial V sobre F munido de uma multiplicação $\cdot : V \times V \rightarrow V$ que satisfaz:

- ① $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- ② $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- ③ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;
- ④ $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

Moralmente uma F -álgebra é um "**anel + espaço vetorial**" de tal modo que a operação de multiplicação do anel é associativa (1), compatível com a soma de vetores (2, 3) e com a multiplicação por escalares (4).

Exemplos

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $M_n(\mathbb{Z}_3[x])$, etc.

Identidades Polinomiais (PI)

Ideia

Modelar as "**relações equacionais**" satisfeitas por **todos os elementos** de uma álgebra A . Por exemplo, uma álgebra comutativa é uma álgebra que satisfaz o seguinte axioma $a \cdot b = b \cdot a$. Que pode ser reescrito como $a \cdot b - b \cdot a = 0$. Isso motiva pensar no seguinte polinômio nas variáveis **não comutativas** x e y $p(x, y) = xy - yx$

Identidades Polinomiais (PI)

Ideia

Modelar as "**relações equacionais**" satisfeitas por **todos os elementos** de uma álgebra A . Por exemplo, uma álgebra comutativa é uma álgebra que satisfaz o seguinte axioma $a \cdot b = b \cdot a$. Que pode ser reescrito como $a \cdot b - b \cdot a = 0$. Isso motiva pensar no seguinte polinômio nas variáveis **não comutativas** x e y $p(x, y) = xy - yx$ e o axioma passa a ser

$$p(a, b) = a \cdot b - b \cdot a = 0, \forall a, b \in A.$$

Identidades Polinomiais (PI)

Ideia

Modelar as "**relações equacionais**" satisfeitas por **todos os elementos** de uma álgebra A . Por exemplo, uma álgebra comutativa é uma álgebra que satisfaz o seguinte axioma $a \cdot b = b \cdot a$. Que pode ser reescrito como $a \cdot b - b \cdot a = 0$. Isso motiva pensar no seguinte polinômio nas variáveis **não comutativas** x e y $p(x, y) = xy - yx$ e o axioma passa a ser

$$p(a, b) = a \cdot b - b \cdot a = 0, \forall a, b \in A.$$

Formalização

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto e $F\langle X \rangle$ a F -álgebra associativa livre sobre X .

Identidades Polinomiais (PI)

Ideia

Modelar as "**relações equacionais**" satisfeitas por **todos os elementos** de uma álgebra A . Por exemplo, uma álgebra comutativa é uma álgebra que satisfaz o seguinte axioma $a \cdot b = b \cdot a$. Que pode ser reescrito como $a \cdot b - b \cdot a = 0$. Isso motiva pensar no seguinte polinômio nas variáveis **não comutativas** x e y $p(x, y) = xy - yx$ e o axioma passa a ser

$$p(a, b) = a \cdot b - b \cdot a = 0, \forall a, b \in A.$$

Formalização

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto e $F\langle X \rangle$ a F -álgebra associativa livre sobre X . Uma **identidade polinomial (PI)** para A é um elemento não nulo de

$$\text{Id}(A) = \bigcap_{\phi: F\langle X \rangle \rightarrow A} \ker \phi \subseteq F\langle X \rangle.$$

Identidades Polinomiais (PI)

Ideia

Modelar as "**relações equacionais**" satisfeitas por **todos os elementos** de uma álgebra A . Por exemplo, uma álgebra comutativa é uma álgebra que satisfaz o seguinte axioma $a \cdot b = b \cdot a$. Que pode ser reescrito como $a \cdot b - b \cdot a = 0$. Isso motiva pensar no seguinte polinômio nas variáveis **não comutativas** x e y $p(x, y) = xy - yx$ e o axioma passa a ser

$$p(a, b) = a \cdot b - b \cdot a = 0, \forall a, b \in A.$$

Formalização

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto e $F\langle X \rangle$ a F -álgebra associativa livre sobre X . Uma **identidade polinomial (PI)** para A é um elemento não nulo de

$$\text{Id}(A) = \bigcap_{\phi: F\langle X \rangle \rightarrow A} \ker \phi \subseteq F\langle X \rangle.$$

Uma F -álgebra é uma **PI-álgebra** quando possui uma PI.

Exemplos e Propriedades

Exemplos

Álgebras comutativas, via $xy - yx$, anticomutativas, via $xy + yz$, e nilpotentes, via $x_1x_2 \cdots x_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Por definição $\text{Id}(A)$ é intersecção de ideais e, portanto, um ideal. Isso diz que o conjunto de PI's de A é fechado para a **soma** e para **produto "externo"**.

Exemplos e Propriedades

Exemplos

Álgebras comutativas, via $xy - yx$, anticomutativas, via $xy + yz$, e nilpotentes, via $x_1x_2 \cdots x_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Por definição $\text{Id}(A)$ é intersecção de ideais e, portanto, um ideal. Isso diz que o conjunto de PI's de A é fechado para a **soma** e para **produto "externo"**.

Além disso, dado um homomorfismo de álgebras $\Phi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ e $\Psi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ temos a seguinte composição $\Psi \circ \Phi : F\langle X \rangle \rightarrow A$.

Exemplos e Propriedades

Exemplos

Álgebras comutativas, via $xy - yx$, anticomutativas, via $xy + yz$, e nilpotentes, via $x_1x_2 \cdots x_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Por definição $\text{Id}(A)$ é intersecção de ideais e, portanto, um ideal. Isso diz que o conjunto de PI's de A é fechado para a **soma** e para **produto "externo"**.

Além disso, dado um homomorfismo de álgebras $\Phi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ e $\Psi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ temos a seguinte composição $\Psi \circ \Phi : F\langle X \rangle \rightarrow A$. Se $p \in \text{Id}(A)$, então $p(x_1, \dots, x_m) \in \ker(\Psi \circ \Phi)$.

Exemplos e Propriedades

Exemplos

Álgebras comutativas, via $xy - yx$, anticomutativas, via $xy + yz$, e nilpotentes, via $x_1x_2 \cdots x_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Por definição $\text{Id}(A)$ é intersecção de ideais e, portanto, um ideal. Isso diz que o conjunto de PI's de A é fechado para a **soma** e para **produto "externo"**.

Além disso, dado um homomorfismo de álgebras $\Phi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ e $\Psi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ temos a seguinte composição $\Psi \circ \Phi : F\langle X \rangle \rightarrow A$. Se $p \in \text{Id}(A)$, então $p(x_1, \dots, x_m) \in \ker(\Psi \circ \Phi)$.

Mas $F\langle X \rangle$ é livre em X , então Φ é induzida por $\phi : X \rightarrow F\langle X \rangle$ e escrevendo $\phi(x_i) = f_i(x_1, \dots, x_n)$, para $i \in [m]$ isso diz que $\Phi(p(x_1, \dots, x_m)) = p(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in \ker(\Psi)$.

Exemplos e Propriedades

Exemplos

Álgebras comutativas, via $xy - yx$, anticomutativas, via $xy + yz$, e nilpotentes, via $x_1x_2 \cdots x_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Por definição $\text{Id}(A)$ é intersecção de ideais e, portanto, um ideal. Isso diz que o conjunto de PI's de A é fechado para a **soma** e para **produto "externo"**.

Além disso, dado um homomorfismo de álgebras $\Phi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ e $\Psi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ temos a seguinte composição $\Psi \circ \Phi : F\langle X \rangle \rightarrow A$. Se $p \in \text{Id}(A)$, então $p(x_1, \dots, x_m) \in \ker(\Psi \circ \Phi)$.

Mas $F\langle X \rangle$ é livre em X , então Φ é induzida por $\phi : X \rightarrow F\langle X \rangle$ e escrevendo $\phi(x_i) = f_i(x_1, \dots, x_n)$, para $i \in [m]$ isso diz que $\Phi(p(x_1, \dots, x_m)) = p(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in \ker(\Psi)$.

Ou seja, temos uma propriedade de **"mudança de variável"** (formalmente T-ideal): $p(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in \text{Id}(A)$.

Aplicação

Processo de linearização: Suponha $x^2 \in \text{Id}(A)$,

Aplicação

Processo de linearização: Suponha $x^2 \in \text{Id}(A)$, então a mudança de variável diz que $(x + y)^2, y^2 \in \text{Id}(A)$.

Aplicação

Processo de linearização: Suponha $x^2 \in \text{Id}(A)$, então a mudança de variável diz que $(x + y)^2, y^2 \in \text{Id}(A)$. Mas $\text{Id}(A)$ é um ideal:

$$(x + y)^2 - x^2 - y^2 = x^2 + xy + yx + y^2 - x^2 - y^2 = xy + yx \in \text{Id}(A).$$

Em característica zero esse processo é reversível, pois $y \mapsto x$ acarreta $2x^2 \in \text{Id}(A) \implies x^2 \in \text{Id}(A)$.

Aplicação

Processo de linearização: Suponha $x^2 \in \text{Id}(A)$, então a mudança de variável diz que $(x + y)^2, y^2 \in \text{Id}(A)$. Mas $\text{Id}(A)$ é um ideal:

$$(x + y)^2 - x^2 - y^2 = x^2 + xy + yx + y^2 - x^2 - y^2 = xy + yx \in \text{Id}(A).$$

Em característica zero esse processo é reversível, pois $y \mapsto x$ acarreta $2x^2 \in \text{Id}(A) \implies x^2 \in \text{Id}(A)$.

Consequência: Basta considerar **polinômios multilineares**:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Aplicação

Processo de linearização: Suponha $x^2 \in \text{Id}(A)$, então a mudança de variável diz que $(x + y)^2, y^2 \in \text{Id}(A)$. Mas $\text{Id}(A)$ é um ideal:

$$(x + y)^2 - x^2 - y^2 = x^2 + xy + yx + y^2 - x^2 - y^2 = xy + yx \in \text{Id}(A).$$

Em característica zero esse processo é reversível, pois $y \mapsto x$ acarreta $2x^2 \in \text{Id}(A) \implies x^2 \in \text{Id}(A)$.

Consequência: Basta considerar **polinômios multilineares**:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Utilidade: Polinômios multilineares só precisam ser avaliados em *tuplas de elementos da base* do espaço vetorial subjacente:

$$\begin{aligned}(xy + yx)(u + v, w) &= (u + v)w + w(u + v) = uw + vw + wu + wv \\ &= (uw + wu) + (vw + wv) \\ &= (xy + yx)(u, w) + (xy + yx)(v, w).\end{aligned}$$

Misturando Polinômios Multilineares e Identities

Exemplo

polinômio **standard** de grau 3:

$$St_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1 - x_1x_3x_2 + x_3x_1x_2 - x_3x_2x_1.$$

Misturando Polinômios Multilineares e Identities

Exemplo

polinômio **standard** de grau 3:

$$\text{St}_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1 - x_1x_3x_2 + x_3x_1x_2 - x_3x_2x_1.$$

$$\text{St}_3(a, a, b) = aab - aab + aba - aba + baa - baa.$$

Consequência: St_3 é PI para álgebras de dimensão 2. Generalização do argumento: St_{n+1} é PI para álgebras de dimensão n . Isto é, a classe das álgebras de PI engloba a **classe das álgebras de dimensão finita**.

Misturando Polinômios Multilineares e Identities

Ideia: Basta estudar os polinômios multilineares, a mudança de variável permite trocar as variáveis que aparecem no polinômio.

Formalização: Fixe n variáveis $x_1, \dots, x_n$ e considere o espaço de todos os polinômios multilineares nestas variáveis:

$$P_n = \text{span}_F \{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Misturando Polinômios Multilineares e Identidades

Ideia: Basta estudar os polinômios multilineares, a mudança de variável permite trocar as variáveis que aparecem no polinômio.

Formalização: Fixe n variáveis $x_1, \dots, x_n$ e considere o espaço de todos os polinômios multilineares nestas variáveis:

$$P_n = \text{span}_F \{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

E o objeto de estudo passa a ser

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)},$$

que é um S_n -módulo via "permutação das variáveis":

$$\tau([x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}]) = [x_{\tau\sigma(1)} \cdots x_{\tau\sigma(n)}]$$

Moralmente $P_n(A)$ codifica as expressões de A que não podem ser "simplificadas".

Exemplos e Sequência de Codimensões

Exemplos

Seja C uma **álgebra comutativa**, então se $a_1, \dots, a_n \in C$ temos:

$$\begin{aligned}(x_1 \cdots x_n - x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)})(a_1, \dots, a_n) &= a_1 \cdots a_n - a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \\ &= a_1 \cdots a_n - a_1 \cdots a_n = 0,\end{aligned}$$

Exemplos e Sequência de Codimensões

Exemplos

Seja C uma **álgebra comutativa**, então se $a_1, \dots, a_n \in C$ temos:

$$\begin{aligned}(x_1 \cdots x_n - x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)})(a_1, \dots, a_n) &= a_1 \cdots a_n - a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \\ &= a_1 \cdots a_n - a_1 \cdots a_n = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $x_1 \cdots x_n \equiv x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \pmod{\text{Id}(C)}$ e $P_n(C) \cong \text{span}_F\{x_1 \cdots x_n\}$.

Exemplos e Sequência de Codimensões

Exemplos

Seja C uma **álgebra comutativa**, então se $a_1, \dots, a_n \in C$ temos:

$$\begin{aligned}(x_1 \cdots x_n - x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)})(a_1, \dots, a_n) &= a_1 \cdots a_n - a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \\ &= a_1 \cdots a_n - a_1 \cdots a_n = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $x_1 \cdots x_n \equiv x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \pmod{\text{Id}(C)}$ e $P_n(C) \cong \text{span}_F\{x_1 \cdots x_n\}$.

Seja N uma **álgebra nilpotente**, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$b_1 \cdots b_m = 0$, para todos $b_i \in N$. Ou seja, $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} \in \text{Id}(N)$, para todo $\sigma \in S_k$ e $k \geq m$, isto é, $P_k(N) \equiv 0$.

Exemplos e Sequência de Codimensões

Exemplos

Seja C uma **álgebra comutativa**, então se $a_1, \dots, a_n \in C$ temos:

$$\begin{aligned}(x_1 \cdots x_n - x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)})(a_1, \dots, a_n) &= a_1 \cdots a_n - a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \\ &= a_1 \cdots a_n - a_1 \cdots a_n = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $x_1 \cdots x_n \equiv x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \pmod{\text{Id}(C)}$ e $P_n(C) \cong \text{span}_F \{x_1 \cdots x_n\}$.

Seja N uma **álgebra nilpotente**, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$b_1 \cdots b_m = 0$, para todos $b_i \in N$. Ou seja, $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} \in \text{Id}(N)$, para todo $\sigma \in S_k$ e $k \geq m$, isto é, $P_k(N) \equiv 0$.

A n -ésima codimensão da álgebra A é o número

$$c_n(A) = \dim_F P_n(A) = \dim_F \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}.$$

A sequência $(c_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ é chamada de **sequência de codimensões de A** .

Exemplos e Padrão

Exemplos

Álgebras Nilpotentes: $c_n(N) = 0$, para n grande o suficiente.

Exemplos e Padrão

Exemplos

Álgebras Nilpotentes: $c_n(N) = 0$, para n grande o suficiente.

Álgebras Comutativas: $c_n(C) = 1$, para todo n .

Exemplos e Padrão

Exemplos

Álgebras Nilpotentes: $c_n(N) = 0$, para n grande o suficiente.

Álgebras Comutativas: $c_n(C) = 1$, para todo n .

Álgebra de Grassmann: é a álgebra

$$G := \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$$

e $c_n(G) = 2^{n-1}$.

Exemplos e Padrão

Exemplos

Álgebras Nilpotentes: $c_n(N) = 0$, para n grande o suficiente.

Álgebras Comutativas: $c_n(C) = 1$, para todo n .

Álgebra de Grassmann: é a álgebra

$$G := \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$$

e $c_n(G) = 2^{n-1}$.

Álgebra de Matrizes 2×2 triangulares superiores:

$$c_n(UT(1, 1)) = 2^{n-1}(n-1) + 2.$$

Exemplos e Padrão

Exemplos

Álgebras Nilpotentes: $c_n(N) = 0$, para n grande o suficiente.

Álgebras Comutativas: $c_n(C) = 1$, para todo n .

Álgebra de Grassmann: é a álgebra

$$G := \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$$

e $c_n(G) = 2^{n-1}$.

Álgebra de Matrizes 2×2 triangulares superiores:

$$c_n(UT(1, 1)) = 2^{n-1}(n-1) + 2.$$

Os exemplos acima apresentam o seguinte padrão:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(N)} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(C)} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(G)} = 2$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(UT(1, 1))} = 2$

PI-Expoente de uma Álgebra

O padrão encontrado motiva a seguinte definição: o **PI-Expoente** de uma álgebra A é o seguinte limite

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

quando ele existe.

PI-Expoente de uma Álgebra

O padrão encontrado motiva a seguinte definição: o **PI-Expoente** de uma álgebra A é o seguinte limite

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

quando ele existe.

Perguntas: Dada A uma PI-álgebra (associativa), quando existe $\exp(A)$?
Nos casos em que existe, quando $\exp(A) \in \mathbb{N}$?

PI-Expoente de uma Álgebra

O padrão encontrado motiva a seguinte definição: o **PI-Expoente** de uma álgebra A é o seguinte limite

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

quando ele existe.

Perguntas: Dada A uma PI-álgebra (associativa), quando existe $\exp(A)$?
Nos casos em que existe, quando $\exp(A) \in \mathbb{N}$?

Respostas: Se A é uma PI-álgebra (associativa), então $\exp(A)$ sempre existe e sempre é um inteiro não negativo.

Ideia da Demonstração: Simplificações

Como $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$ é um S_n -módulo temos a seguinte apresentação da codimensão $c_n(A) = \chi_n(A)(1)$, em que $\chi_n(A)$ é o caracter associado a representação de S_n em $P_n(A)$. Escrevendo $\lambda \vdash n$ para partições de n e considere a seguinte decomposição do caracter

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Ideia da Demonstração: Simplificações

Como $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$ é um S_n -módulo temos a seguinte apresentação da codimensão $c_n(A) = \chi_n(A)(1)$, em que $\chi_n(A)$ é o caracter associado a representação de S_n em $P_n(A)$. Escrevendo $\lambda \vdash n$ para partições de n e considere a seguinte decomposição do caracter

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda.$$

- 1 Se $F \subseteq K$ é uma extensão de corpos, então $\text{Id}^K(A \otimes_F K) = \text{Id}^F(A)$ e $m_\lambda^K = m_\lambda^F$. Isto é, basta considerar corpos algebricamente fechados.
- 2 Se A é uma PI-álgebra, então existe uma **superálgebra** $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ de dimensão finita tal que $c_n(A) = c_n(G(B))$, em que $G(B) = (G^{(0)} \otimes B^{(0)}) \oplus (G^{(1)} \otimes B^{(1)})$ é a **envolvente de Grassmann de B**.

Ideia da Demonstração: Candidato a Expoente

Análise: Qual estrutura de $G(B)$ pode ser utilizada para demonstrar o resultado? Podemos escrever $B = (B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) + J$, em que B_i são superálgebras simples e J é o radical de Jacobson de B .

Ideia da Demonstração: Candidato a Expoente

Análise: Qual estrutura de $G(B)$ pode ser utilizada para demonstrar o resultado? Podemos escrever $B = (B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) + J$, em que B_i são superálgebras simples e J é o radical de Jacobson de B . Em característica zero, basta considerar polinômios multilineares, logo produtos não nulos

$$(b_1 \otimes g_1)(b_2 \otimes g_2) \cdots (b_l \otimes g_l) = (b_1 b_2 \cdots b_l) \otimes (g_1 g_2 \cdots g_l) \neq 0 \\ \implies b_1 b_2 \cdots b_l \neq 0$$

Ideia da Demonstração: Candidato a Expoente

Análise: Qual estrutura de $G(B)$ pode ser utilizada para demonstrar o resultado? Podemos escrever $B = (B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) + J$, em que B_i são superálgebras simples e J é o radical de Jacobson de B . Em característica zero, basta considerar polinômios multilineares, logo produtos não nulos

$$(b_1 \otimes g_1)(b_2 \otimes g_2) \cdots (b_l \otimes g_l) = (b_1 b_2 \cdots b_l) \otimes (g_1 g_2 \cdots g_l) \neq 0 \\ \implies b_1 b_2 \cdots b_l \neq 0$$

Assim, se $b_m \in B_i$, então $b_{m+1} \in B_i \cup J$.

Ideia da Demonstração: Candidato a Expoente

Análise: Qual estrutura de $G(B)$ pode ser utilizada para demonstrar o resultado? Podemos escrever $B = (B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) + J$, em que B_i são superálgebras simples e J é o radical de Jacobson de B . Em característica zero, basta considerar polinômios multilineares, logo produtos não nulos

$$(b_1 \otimes g_1)(b_2 \otimes g_2) \cdots (b_l \otimes g_l) = (b_1 b_2 \cdots b_l) \otimes (g_1 g_2 \cdots g_l) \neq 0 \\ \implies b_1 b_2 \cdots b_l \neq 0$$

Assim, se $b_m \in B_i$, então $b_{m+1} \in B_i \cup J$. Isso diz que todo produto não nulo corresponde a uma escolha de índices $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ tal que

$$B_{i_1} J B_{i_2} \cdots J B_{i_l} \neq 0 \tag{1}$$

Defina $q = \max\{\dim_F(B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_l} \mid \text{como em (1)}\}$

Ideia da Demonstração: Limitante Superior

Denote $\dim B = m$ e lembrando da decomposição

$$\chi(G(B)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda} \chi_{\lambda}$$

- ① se $m_{\lambda} \neq 0$, então $\lambda \in H(d, q-d) \cup (s^u)$ para algum $d \leq 0$, em que $H(d, q-d)$ é o conjunto das partições tais que $\lambda_{d+1} \leq q-d$, $s = (m+1)^2 + m - q + d$ e $u = (m+1)^2 + m - d$.

Ideia da Demonstração: Limitante Superior

Denote $\dim B = m$ e lembrando da decomposição

$$\chi(G(B)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda} \chi_{\lambda}$$

- ① se $m_{\lambda} \neq 0$, então $\lambda \in H(d, q-d) \cup (s^u)$ para algum $d \leq 0$, em que $H(d, q-d)$ é o conjunto das partições tais que $\lambda_{d+1} \leq q-d$, $s = (m+1)^2 + m - q + d$ e $u = (m+1)^2 + m - d$.
- ② $\sum \chi_{\lambda}(1) \leq bn^c q^n$, onde a soma é feita em $H(d, q-d) \cup (s^u)$.

Ideia da Demonstração: Limitante Superior

Denote $\dim B = m$ e lembrando da decomposição

$$\chi(G(B)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda} \chi_{\lambda}$$

- 1 se $m_{\lambda} \neq 0$, então $\lambda \in H(d, q-d) \cup (s^u)$ para algum $d \leq 0$, em que $H(d, q-d)$ é o conjunto das partições tais que $\lambda_{d+1} \leq q-d$, $s = (m+1)^2 + m - q + d$ e $u = (m+1)^2 + m - d$.
- 2 $\sum \chi_{\lambda}(1) \leq bn^c q^n$, onde a soma é feita em $H(d, q-d) \cup (s^u)$.
- 3 PI-álgebras finitamente geradas tem dimensão de Gel'fand-Kirillov finita, disso tira-se que $m_{\lambda} \leq an^T$.

Ideia da Demonstração: Limitante Superior

Denote $\dim B = m$ e lembrando da decomposição

$$\chi(G(B)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda} \chi_{\lambda}$$

- ① se $m_{\lambda} \neq 0$, então $\lambda \in H(d, q-d) \cup (s^u)$ para algum $d \leq 0$, em que $H(d, q-d)$ é o conjunto das partições tais que $\lambda_{d+1} \leq q-d$, $s = (m+1)^2 + m - q + d$ e $u = (m+1)^2 + m - d$.
- ② $\sum \chi_{\lambda}(1) \leq bn^c q^n$, onde a soma é feita em $H(d, q-d) \cup (s^u)$.
- ③ PI-álgebras finitamente geradas tem dimensão de Gel'fand-Kirillov finita, disso tira-se que $m_{\lambda} \leq an^T$.
- ④ Juntando as informações: $c_n(G(B)) \leq Sn^s q^n$.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- 1 É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- 1 É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.
- 2 É possível construir polinômios (chamados de polinômios centrais) que não são identidades para as álgebra de matrizes, disso se constrói polinômios f_i que não são identidades para $G(B_i)$, repectivamente.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- 1 É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.
- 2 É possível construir polinômios (chamados de polinômios centrais) que não são identidades para as álgebra de matrizes, disso se constrói polinômios f_i que não são identidades para $G(B_i)$, repectivamente.
- 3 Com os polinômios f_i se constrói um polinômio f que não é identidade para $G(B)$.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- 1 É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.
- 2 É possível construir polinômios (chamados de polinômios centrais) que não são identidades para as álgebra de matrizes, disso se constrói polinômios f_i que não são identidades para $G(B_i)$, repectivamente.
- 3 Com os polinômios f_i se constrói um polinômio f que não é identidade para $G(B)$.
- 4 Esse processo é feito controlando $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- 1 É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.
- 2 É possível construir polinômios (chamados de polinômios centrais) que não são identidades para as álgebra de matrizes, disso se constrói polinômios f_i que não são identidades para $G(B_i)$, repectivamente.
- 3 Com os polinômios f_i se constrói um polinômio f que não é identidade para $G(B)$.
- 4 Esse processo é feito controlando $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$. Disso mostra-se que $\chi_{h(d,l,2t-4m)}(1) \leq c_n(G(B))$, para n grande, em que $h(d, l, 2t - 4m) = (\underbrace{l + 2t - 4m, \dots, l + 2t - m}_d \text{ vezes}, \underbrace{l, \dots, l}_{2t-4m \text{ vezes}})$ e $q = d + l$.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- 1 É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.
- 2 É possível construir polinômios (chamados de polinômios centrais) que não são identidades para as álgebra de matrizes, disso se constrói polinômios f_i que não são identidades para $G(B_i)$, repectivamente.
- 3 Com os polinômios f_i se constrói um polinômio f que não é identidade para $G(B)$.
- 4 Esse processo é feito controlando $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$. Disso mostra-se que $\chi_{h(d,l,2t-4m)}(1) \leq c_n(G(B))$, para n grande, em que $h(d, l, 2t - 4m) = (\underbrace{l + 2t - 4m, \dots, l + 2t - m}_d \text{ vezes}, \underbrace{l, \dots, l}_{2t-4m \text{ vezes}})$ e $q = d + l$.
- 5 $\chi_{h(d,l,2t-4m)}(1) \simeq an^b(d + l)^n$.

Ideia da Demonstração: Limitante Inferior

- ① É possível classificar todas as superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero (as nossas B_i), essas superálgebras são isomorfas (como superálgebras) a superálgebras cujo espaço vetorial subjacente é matrizes.
- ② É possível construir polinômios (chamados de polinômios centrais) que não são identidades para as álgebra de matrizes, disso se constrói polinômios f_i que não são identidades para $G(B_i)$, repectivamente.
- ③ Com os polinômios f_i se constrói um polinômio f que não é identidade para $G(B)$.
- ④ Esse processo é feito controlando $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$. Disso mostra-se que $\chi_{h(d,l,2t-4m)}(1) \leq c_n(G(B))$, para n grande, em que $h(d, l, 2t - 4m) = (\underbrace{l + 2t - 4m, \dots, l + 2t - m}_{d \text{ vezes}}, \underbrace{l, \dots, l}_{2t-4m \text{ vezes}})$ e $q = d + l$.
- ⑤ $\chi_{h(d,l,2t-4m)}(1) \simeq an^b(d + l)^n$.
- ⑥ Juntando $Rn^r q^n \leq c_n(G(B))$, para n grande o suficiente.

Ideia da Demonstração

(A. Giambruno, M. Zaicev - 1999) Dada uma PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero existem constantes $R > 0$, r , S e s tais que

$$Rn^r q^n \leq c_n(A) = c_n(A \otimes \overline{F}) = c_n(G(B)) \leq Sn^s q^n.$$

Ideia da Demonstração

(A. Giambruno, M. Zaicev - 1999) Dada uma PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero existem constantes $R > 0$, r , S e s tais que

$$Rn^r q^n \leq c_n(A) = c_n(A \otimes \overline{F}) = c_n(G(B)) \leq Sn^s q^n.$$

Tomando a raiz n -ésima e passando para o limite temos

$$\exp(A) = q.$$

Corolários e Novos Exemplos

Se A tem dimensão finita, então $\text{Id}(A) = \text{Id}(G(A))$ e:

- 1 $\exp(A) \leq \dim A$;
- 2 Se A é semissimples, então $\exp(A) = \dim_{Z(B)} B$, em que $B \subseteq A$ é uma subálgebra simples maximal para a dimensão sobre o centro.
- 3 A é simples se, e somente se, $\exp(A) = \dim(A)$.

Corolários e Novos Exemplos

Se A tem dimensão finita, então $\text{Id}(A) = \text{Id}(G(A))$ e:

- 1 $\exp(A) \leq \dim A$;
- 2 Se A é semissimples, então $\exp(A) = \dim_{Z(B)} B$, em que $B \subseteq A$ é uma subálgebra simples maximal para a dimensão sobre o centro.
- 3 A é simples se, e somente se, $\exp(A) = \dim(A)$.

Exemplos

- 1 $\exp(M_k(F)) = k^2$,
- 2 $\exp(M_k(G)) = 2k^2$ e
- 3 $\exp(UT(d_1, \dots, d_n)) = d_1^2 + \dots + d_n^2$.

Muito obrigado pela atenção!